4.1_ Grundlagen der Bruchrechnung

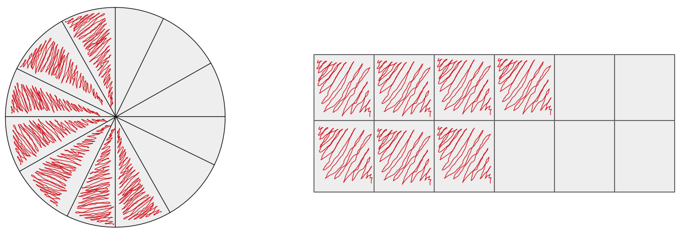
Die folgenden Erklärungen der gemeinen Brüche werden sich hauptsächlich um die positiven rationalen Zahlen einschließlich der Zahl Null (kurz: $\mathbb{Q}_0^+$) drehen. Damit kann der Fokus auf die einzelnen Verknüpfungsregeln gelegt werden. Hat man verstanden, wie sich $\frac{3}{4} \cdot \frac{9}{10}$ berechnen lässt, so kann man ohne Schwierigkeiten auch den Produktwert von $\frac{3}{4} \cdot \left(-\frac{9}{10}\right)$ angeben. In Anlehnung an die ganzen Zahlen wird das erste Ergebnis eine positive rationale Zahl sein. Das zweite Ergebnis besitzt denselben Betrag, aber ein negatives Vorzeichen (vgl. Kapitel 3).

Der **gemeine Bruch** setzt sich aus drei Bestandteilen zusammen: dem Bruchstrich, dem Zähler und dem Nenner.

Zähler	a
Bruchstrich	———
Nenner	b

Der Nenner eines Bruches zeigt an, in wie viele gleich große Teile das Ganze geteilt wurde. Der Zähler gibt an, wie viele dieser Teile genommen werden. Wird beispielsweise eine Torte in 12 gleich große Stücke eingeteilt und essen die Gäste insgesamt 7 Stücke, so wurden $\frac{7}{12}$ des Kuchens verspeist.

BEISPIEL $\frac{7}{12}$



Ist der Betrag eines Bruchs größer als 1, so lässt sich diese Zahl auch in der gemischten Schreibweise darstellen.

$$\left(1\frac{1}{5};\ -5\frac{6}{7};\ \ldots\right)$$

BEISPIEL Max kauft für sich und seine Freunde vier Pizzen. Eine halbe Pizza bleibt übrig. Insgesamt wurden somit $3\frac{1}{2}$ Pizzen gegessen. Die natürliche Zahl gibt die Anzahl der Ganzen und der Bruch den fehlenden Bruchteil an:

$$3\frac{1}{2} = 3 + \frac{1}{2} = \frac{6}{2} + \frac{1}{2} = \frac{7}{2}$$

Für ein und denselben Bildpunkt an der Zahlengeraden gibt es durch die Erweiterung der Zahlenmenge nun unendlich viele Darstellungsmöglichkeiten.

$$1 = \frac{2}{2} = \frac{3}{3} = \frac{4}{4} = \frac{5}{5} = \cdots$$

© fotolia / Timmary

Teilt man eine Pizza in zwei Hälften und nimmt beide Stücke, so erhält man die ganze Pizza, also 1. Teilt man sie in fünf gleich große Stücke und nimmt alle fünf Stücke, hat man ebenfalls die gesamte Pizza.

Auf dieselbe Art und Weise lassen sich auch andere Zahlen verschieden darstellen. Dazu benötigt man das Erweitern oder Kürzen. Diese Verfahren sind essentiell für das Rechnen mit Brüchen.

Möchte man einen Bruch *erweitern*, so multipliziert man Zähler und Nenner mit der gleichen Zahl.

$\frac{2}{5} = \frac{2 \cdot 4}{5 \cdot 4} = \frac{8}{20}$ (hier wurde mit 4 erweitert)

$\frac{2}{5} = \frac{2 \cdot 11}{5 \cdot 11} = \frac{22}{55}$ (hier wurde mit 11 erweitert)

Es gilt: $\frac{2}{5} = \frac{8}{20} = \frac{22}{55}$

Alle drei Brüche befinden sich an der Zahlengeraden an derselben Stelle – sie werden durch den gleichen Bildpunkt repräsentiert.

Möchte man einen Bruch *kürzen*, so dividiert man Zähler und Nenner durch die gleiche Zahl ($\neq 0$).

$\frac{8}{26} = \frac{8 : 2}{26 : 2} = \frac{4}{13}$ (hier wurde mit 2 gekürzt)

$\frac{8}{28} = \frac{8 : 2}{28 : 2} = \frac{4}{14} = \frac{4 : 2}{14 : 2} = \frac{2}{7}$ (hier wurde zweimal mit 2 gekürzt; zu diesem Ergebnis kommt man auch durch Kürzen mit 4)

Lässt sich ein Bruch nicht weiter kürzen, so ist er ›vollständig gekürzt‹, wie beispielsweise $\frac{2}{7}$.

EXPERTISE

ANNELIES PAULITSCH
Pensionierte Lehrerin für Mathematik und Religion

Im Land der Bruchzahlen

Vor langer Zeit wütete im Land der Bruchzahlen ein fürchterlicher Drachen. Er war aus dem Land der geometrischen Figuren ausgebrochen und versetzte seitdem die Brüche in Angst und Schrecken. (…) »Meine lieben Brüche«, brüllte er so laut, dass man es in jedem Winkel des Landes hören konnte, »ich gebe euch eine Chance! Ihr könnt mich loswerden! – Ich werde auf der Stelle verschwinden, wenn einer von euch mir eine Aufgabe stellt, die ich nicht lösen kann. Ihr habt genau drei Tage Zeit und dürft höchstens drei Aufgaben stellen.« (…) Da trat $\frac{1}{2}$ *vor den Drachen. »Nenne mir«, sprach er, »den Bruch, der größer als ich und auf dem Zahlenstrahl mein nächster Nachbar ist.«*

Tipp Diese und ähnliche Geschichten motivieren die Kinder zu einer intensiven Auseinandersetzung mit Brüchen und ermöglichen so ein tieferes Verständnis. Natürlich konnte der Drache keine solche Zahl nennen, da es immer einen noch näheren Nachbarn gibt.

Wie bereits erwähnt, gibt es für ein und dieselbe Bruchzahl verschiedene Namen. So ist $\frac{1}{2} = \frac{5}{10} = 0{,}5$. Bei der letzten Zahl handelt es sich um einen Dezimalbruch. Diese Brüche haben ein Komma. Vor dem Komma stehen die Ganzen und hinter dem Komma die zugehörigen Bruchteile des Ganzen. Sie heißen Dezimalen.

Die Stellen eines Dezimalbruchs

5,359
Ganze → Zehntel (z) → Hundertstel (h) → Tausendstel (t)

Umwandlungen

Für die Umwandlung in einen Bruch wird die ganze Zahl übernommen. Die Dezimalen bilden den Zähler. Im Nenner notiert man die Stufenzahl, die der letzten vorkommenden Dezimale zugeordnet ist (hier: Tausendstel).

$$5{,}359 = 5\frac{359}{1000}$$

Wenn dies möglich ist, wird der Bruch anschließend noch vollständig gekürzt.

$$3{,}25 = 3\frac{25}{100} = 3\frac{1}{4}$$

$7{,}9 = 7\frac{9}{10}$

$1{,}2345 = 1\frac{2345}{10\,000} = 1\frac{469}{2000}$

Hier wurde mit 5 gekürzt. Die natürliche Zahl bleibt beim Kürzen stets unverändert.

$0{,}32 = 0\frac{32}{100} = \frac{8}{25}$

Die null Ganzen lässt man üblicherweise in der gemischten Schreibweise weg.

Um einen Bruch in einen Dezimalbruch umzuwandeln, gibt es verschiedene Möglichkeiten. Wenn möglich, bringt man den Nenner auf eine Stufenzahl (10, 100, 1000 …) und kann so direkt den Dezimalbruch ablesen. Der Nenner gibt an, welche Dezimale die letzte besetzte ist. Man trägt nun den Zähler von rechts beginnend in eine gedachte *Stellenwerttafel* ein und achte besonders auf die richtige Position des Kommas zwischen den Einern und Zehnteln.

Stellenwertsystem

H	Z	E	z	h	t	zt	ht	Dezimalbruch
		0	4	2				0,42
		0	0	5	6			0,056

$\frac{21}{50} = \frac{42}{100} = 0{,}42$ (mit 2 erweitert)

$\frac{7}{125} = \frac{56}{1000} = 0{,}056$ (mit 8 erweitert)

Eine andere Möglichkeit ist das Divisionsverfahren. Dazu teilt man den Zähler durch den Nenner (vgl. Kapitel 1.4). Dabei ist der erste Gedankenschritt neu. Da die 16 null Mal in die 5 passt, wird beim Ergebnis eine Null notiert. Anschließend wird eine 0 an den Dividenden gehängt, denn 5 = 5,000000000…. Man kann also immer wieder eine Null anhängen. Sobald man das Komma im Dividenden überschreitet, muss auch im Ergebnis das Komma gesetzt werden.

Divisionsverfahren am BEISPIEL *von* $\frac{5}{16}$

5,000… : 16 = 0,3125
-0
50 Komma wurde überschritten.
-48
20
-16
40
-32
80
80
0